

Un modèle analytique d'homogénéisation 3D complet pour les plaques composites orthotropes de type carton ondulé

P.T.M. DUONG, B. ABBES, Y.M. LI, A.D. HAMMOU, A. BARRAJ, Y.Q. GUO

GRESPI/ Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage – Université de Reims Champagne-Ardenne,
Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2, France

Tuongminh80@gmail.com, boussad.abbes@univ-reims.fr, yuming.li@univ-reims.fr, yq.guo@univ-reims.fr

Résumé :

La modélisation des plaques composites en carton ondulé est fastidieuse et coûteuse en temps CPU. On propose un modèle d'homogénéisation analytique 3D complet en 2 étapes. A la première étape, on détermine les rigidités globales d'une plaque homogène équivalente. A la deuxième étape, on retransforme la plaque homogénéisée en un solide orthotrope composé de plusieurs couches et on identifie les paramètres des matériaux pour prendre en compte le comportement élasto-plastique suivant l'épaisseur. Le modèle est validé à l'aide du logiciel Abaqus.

Abstract :

Modeling of the corrugated cardboard plates is tedious and time consuming. We propose a 3D complete analytical homogenization model in 2 steps. In the first step, we determine the global rigidities of an equivalent homogeneous plate. In the second step, we transform the homogenized plate into an orthotropic solid composed of several layers and we identify the material parameters to take into account for the elasto-plastic behavior through the thickness of the plate. The model is validated by using the Abaqus software.

Mots clés : Homogénéisation, Carton ondulé, Plaque orthotrope, Eléments finis

1 Introduction

Dans l'industrie de l'emballage, le carton ondulé est un matériau largement utilisé. Il est donc essentiel de pouvoir modéliser et prédire le comportement mécanique de ce type de matériaux. La modélisation numérique des plaques composites orthotropes de type carton ondulé par des éléments de coque est trop fastidieuse et coûteuse. De nombreux modèles d'homogénéisation ont été obtenus par des méthodes analytiques, numériques et expérimentales [1-5]. Beaucoup d'études portent sur les problèmes de traction, flexion et cisaillement, peu d'études sur les problèmes de torsion, mais les travaux sur les problèmes d'écrasement sont rares, voire inexistant dans la littérature.

Cet article a pour objectif de montrer la possibilité de modéliser de manière très efficace le comportement mécanique d'une plaque de carton ondulé composé de 5 strates. L'homogénéisation de ce genre de structures 3D permet d'obtenir une plaque 2D homogène équivalente. A partir de cette plaque 2D équivalente, et pour prendre en compte le comportement élasto-plastique suivant l'épaisseur, on la retransforme en un solide orthotrope composé de plusieurs couches. Les résultats donnés par le présent modèle d'homogénéisation sont comparés à ceux obtenus par la simulation 3D avec logiciel Abaqus. Un exemple d'une plaque rectangulaire en carton ondulé (intercalaire) écrasée entre deux bouteilles est traité dans cet article.

2 Adaptation de la théorie des stratifiés aux cartons de doubles cannelures

Selon la théorie des plaques stratifiées, la loi de comportement d'une plaque composite composée de plusieurs couches peut être écrite sous une forme matricielle (Eq. 1) où $[A]$ représente les rigidités de membrane, $[D]$ les rigidités de flexion et de torsion, $[F]$ les rigidités de cisaillement transverse, $[B]$ le couplage entre membrane et flexion-torsion. Si la plaque composite est symétrique par rapport à sa surface moyenne, ce couplage disparaît et $[B]=0$.

$$\begin{bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{\kappa\} \\ \{\gamma_c\} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il faut noter que la théorie des stratifiés n'est valable que dans le cas des milieux continus. Dans le cas du carton ondulé ayant des cavités, la théorie des stratifiés doit être modifiée.

2.1 Rigidités de traction et de flexion relatives à N_x , M_x , N_y , M_y

Nous avons démontré qu'en traction/compression (N_x) suivant le sens des cannelures MD- x ou en flexion (M_x) autour du sens transverse CD- y , la cannelure se comporte comme une membrane mince et donc ne peut quasiment pas supporter la contrainte normale suivant x [5]. Nous concluons que la cannelure n'a pas de contribution à la rigidité de traction relative à N_x ni à la rigidité de flexion relative à M_x . Ces deux cas de chargement exigent des modifications dans les matrices $[A]$, $[B]$ et $[D]$ obtenues par la théorie des stratifiés:

$$N_x^c = 0 \Rightarrow A_{11}^c = A_{12}^c = A_{13}^c = B_{11}^c = B_{12}^c = B_{13}^c = 0 \quad (2)$$

$$M_x^c = 0 \Rightarrow B_{11}^c = B_{12}^c = B_{13}^c = D_{11}^c = D_{12}^c = D_{13}^c = 0 \quad (3)$$

2.2 Rigidité de cisaillement dans le plan xy relative à N_{xy} ou N_{yx}

On considère la cannelure d'un carton ondulé de longueur $P/2$ (suivant x) et de largeur b (suivant y). Un couple d'efforts de cisaillement par unité de largeur N_{xy} (suivant y) appliqué sur la section MD donne un déplacement v . Le cisaillement de la cannelure peut être facilement traité par la mise à plat de celle-ci :

$$\tau_{12} = \frac{N_{xy}}{e} = G_{12} \gamma_{12} = G_{xy} \frac{v}{l/2} \quad (4)$$

où N_{xy} est l'effort tranchant supporté par la cannelure, $G_{xy}=G_{12}$ le module de cisaillement dans le plan de la cannelure, e l'épaisseur de la cannelure et l la longueur développée de la cannelure.

La déformation de cisaillement dans le plan xy de la cannelure 3D est définie par :

$$\gamma_{xy} = \frac{v}{P/2} \quad (5)$$

Ainsi on obtient la loi de comportement pour le cisaillement dans le plan xy :

$$N_{xy} = \frac{G_{xy} e P}{l} \gamma_{xy} \quad (6)$$

Pour un carton à double cannelures, la rigidité de cisaillement dans le plan du carton est donnée par la somme des rigidités des 5 couches :

$$N_{xy} = A_{33} \gamma_{xy} \quad ; \quad A_{33} = G_{xy}^a e^a + \frac{G_{xy}^b e^b P^b}{l^b} + G_{xy}^c e^c + \frac{G_{xy}^d e^d P^d}{l^d} + G_{xy}^e e^e \quad (7)$$

où les indices a , b , c et d représentent respectivement les 5 couches.

2.3 Rigidité de cisaillement transverse sur section CD relative à T_y

Il est difficile de déterminer directement la rigidité de cisaillement transverse sur une section CD relative à T_y à cause du couplage de la flexion et du cisaillement transverse. Selon le théorème de réciprocité, Nordstrand et al. [6] ont proposé de remplacer le cisaillement transverse sous l'effort tranchant T_y (effort suivant z et par unité de longueur suivant x) par un cisaillement sur l'épaisseur sous un effort suivant y .

Pour le carton à double cannelures, la rigidité de cisaillement sur l'épaisseur totale du carton est obtenue comme suit :

$$F_{22} = G^* h \quad (8)$$

$$\text{avec } G^* = \frac{h}{\frac{e^a}{G_{zy}^a} + \frac{h^i}{G^{b*}} + \frac{e^c}{G_{zy}^c} + \frac{h^s}{G^{d*}} + \frac{e^e}{G_{zy}^e} + \frac{\gamma(1-\gamma)(P^i)^2}{G_{xy}^c e^c}} ; \quad G^{b*} = G_{12}^b \frac{4e^b h^b}{P^i l^b} ; \quad G^{d*} = G_{12}^d \frac{4e^d h^d}{P^s l^d}$$

où h^i et h^s sont les hauteurs des cannelures inférieure et supérieure, h la hauteur totale du carton, $\gamma=0.5$.

2.4 Rigidité de cisaillement transverse sur section MD relative à T_x

Il est encore plus difficile de déterminer la rigidité de cisaillement transverse sur une section MD relative à T_x . Selon le théorème de réciprocité, Nordstrand et al. [6] ont proposé de remplacer le cisaillement transverse sous l'effort T_x (suivant z) par un cisaillement sur l'épaisseur sous l'effort suivant x . En fait, ce problème de cisaillement n'est pas vraiment un problème de cisaillement des 5 couches, il est dominé par la flexion locale des 3 faces planes et surtout par la flexion locale des 2 cannelures.

Si on suppose qu'un carton à double cannelures est la superposition de 2 cartons à simple cannelure, alors les modules de cisaillement de ces deux cartons G_i^* et G_s^* peuvent être calculés par les formules analytiques de Nordstrand et al. basée sur la théorie de poutre courbe. Ensuite, la rigidité de cisaillement transverse pour un carton à double cannelures est obtenue comme suit :

$$F_{11} = G^* h = h^2 \left(\frac{h_i}{G_i^*} + \frac{h_s}{G_s^*} \right)^{-1} \quad (9)$$

2.5 Rigidité de torsion sur section MD ou CD relative à M_{xy} ou M_{yx}

Nous avons décomposé la torsion d'une plaque en 2 torsions de poutre (suivant MD et CD) et démontré la formule suivante permettant de déterminer la rigidité de torsion des cartons analytiquement [7]:

$$D_{xy} = \frac{I}{4} \left(\frac{GJ_{MD}}{B} + \frac{GJ_{CD}}{L} \right) \approx \frac{GJ_{CD}}{4L} \quad (L: \text{longueur suivant } x, B: \text{largeur suivant } y) \quad (10)$$

où J_{MD} et J_{CD} sont les rigidités de torsion de poutre sur les section MD et CD respectivement. Il est relativement facile de calculer J_{CD} pour un carton avec une seule cannelure en le considérant comme une section à paroi mince fermée dans laquelle la contribution de la cannelure à la torsion est négligeable. Pour les cartons à double cannelures, les cannelures jouent un rôle important. On divise les 5 couches en 2 parties (FIG. 1) : les deux peaux extérieures sont considérées comme une section à paroi mince fermée, les deux cannelures et la face intermédiaire sont modélisées par quatre modèles ayant une ou deux cellules fermées (FIG. 2). La comparaison des résultats obtenus par ces formules analytiques avec ceux obtenus par des calculs avec Abaqus a montré que le modèle D_{33a} (Eq. 11) a donné les meilleurs résultats (2% pour l'exemple traité).

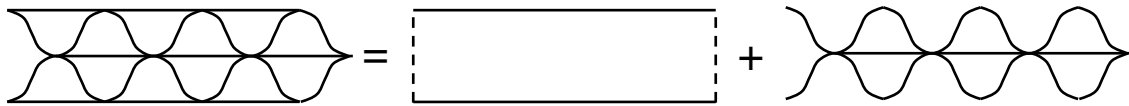


FIG. 1 - Séparation d'une section CD en deux parties pour calculer la rigidité de torsion.

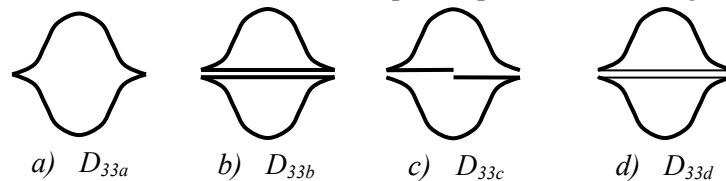


FIG. 2 - Quatre modèles pour la rigidité de torsion des cannelures avec la face intermédiaire.

$$D_{33a} = \frac{4(h^i + h^s)^2 G_{xy}^a e^a G_{xy}^e e^e}{G_{xy}^a e^a + G_{xy}^e e^e} + \frac{4(S_{bc} + n \cdot S_{cd})^2}{P^i \left(\frac{l^b}{G_{xy}^b e^b} + n \cdot \frac{l^d}{G_{xy}^d e^d} \right)} \quad \text{avec } n = \frac{P^i}{P^s} \quad (11)$$

où $S_{bc} + S_{cd}$ est l'aire enveloppée par les deux cannelures sur la période P^i .

Les cartons ondulés ont souvent une section non symétrique par rapport à leur surface moyenne. Il est beaucoup plus facile de déterminer la rigidité de cisaillement dans le plan (A_{33C}) et la rigidité de torsion (D_{33C}) au centre de cisaillement C (ou centre de torsion). Sur la surface moyenne, le cisaillement et la torsion sont couplés. Sur une section CD, supposons que la position du centre de cisaillement C par rapport à la surface moyenne G est z_c , le couplage de cisaillement-torsion en G est représenté par :

$$\begin{Bmatrix} N_{yx} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{33C}(\gamma_{yx} + z_c \kappa_{yx}) \\ D_{33C} \kappa_{yx} + A_{33C} z_c (\gamma_{yx} + z_c \kappa_{yx}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{33C} & A_{33C} z_c \\ A_{33C} z_c & D_{33C} + A_{33C} z_c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yx} \\ \kappa_{yx} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Sur une section MD, il suffit de remplacer N_{yx} par N_{xy} et M_{yx} par $-M_{xy}$. Finalement, les 4 termes dans la matrice (1) doivent être modifiés comme suit :

$$A_{33} = A_{33C} \quad ; \quad B_{33} = A_{33C} z_c \quad ; \quad D_{33} = D_{33C} + A_{33C} z_c^2 \quad (13)$$

3 Solide homogène avec 3 couches et 3 matériaux

Le modèle d'homogénéisation permet d'obtenir les 9 rigidités globales (A_{11} , A_{12} , A_{22} , B_{11} , B_{12} , B_{22} , D_{11} , D_{12} , D_{22}) de la plaque équivalente. Cependant, si l'on veut simuler l'écrasement des cannelures, comme c'est le cas d'un intercalaire entre deux bouteilles d'eau par exemple, le modèle ainsi obtenu ne le permet pas. Nous proposons donc de transformer cette plaque en un solide composé de 3 couches (couches a , c , e) et de 3 matériaux pour pouvoir prendre en compte aussi le comportement dans l'épaisseur du carton ondulé (FIG. 3).

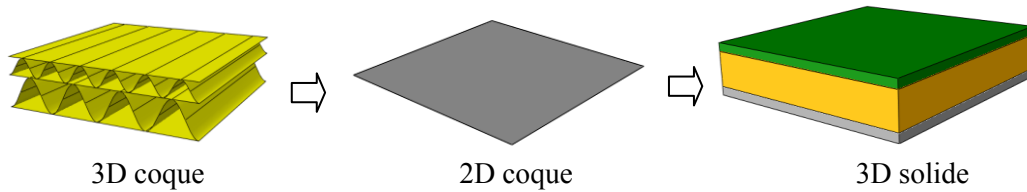


FIG. 3 – Processus d'homogénéisation.

Pour ce solide composé de 3 couches, la théorie des stratifiés donne alors 3 systèmes d'équations et chacun a 3 équations et 3 inconnues :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}^a e^a + Q_{11}^c e^c + Q_{11}^e e^e \\ B_{11} &= Q_{11}^a e^a z^a + Q_{11}^c e^c z^c + Q_{11}^e e^e z^e \\ D_{11} &= Q_{11}^a \left[e^a (z^a)^2 + \frac{1}{12} (e^a)^3 \right] + Q_{11}^c \left[e^c (z^c)^2 + \frac{1}{12} (e^c)^3 \right] + Q_{11}^e \left[e^e (z^e)^2 + \frac{1}{12} (e^e)^3 \right] \\ A_{12} &= Q_{12}^a e^a + Q_{12}^c e^c + Q_{12}^e e^e \\ B_{12} &= Q_{12}^a e^a z^a + Q_{12}^c e^c z^c + Q_{12}^e e^e z^e \\ D_{12} &= Q_{12}^a \left[e^a (z^a)^2 + \frac{1}{12} (e^a)^3 \right] + Q_{12}^c \left[e^c (z^c)^2 + \frac{1}{12} (e^c)^3 \right] + Q_{12}^e \left[e^e (z^e)^2 + \frac{1}{12} (e^e)^3 \right] \\ A_{22} &= Q_{22}^a e^a + Q_{22}^c e^c + Q_{22}^e e^e \\ B_{22} &= Q_{22}^a e^a z^a + Q_{22}^c e^c z^c + Q_{22}^e e^e z^e \\ D_{22} &= Q_{22}^a \left[e^a (z^a)^2 + \frac{1}{12} (e^a)^3 \right] + Q_{22}^c \left[e^c (z^c)^2 + \frac{1}{12} (e^c)^3 \right] + Q_{22}^e \left[e^e (z^e)^2 + \frac{1}{12} (e^e)^3 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

La résolution de ces 3 systèmes nous permet d'obtenir Q_{11}^a , Q_{11}^c , Q_{11}^e , Q_{12}^a , Q_{12}^c , Q_{12}^e , Q_{22}^a , Q_{22}^c , Q_{22}^e .

Ainsi pour chaque couche a , c ou e , nous pouvons calculer les propriétés des matériaux comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nu_{xy} &= \frac{Q_{12}}{Q_{22}} ; \nu_{yx} = \frac{Q_{12}}{Q_{11}} ; E_x = Q_{11}(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) ; E_y = Q_{22}(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) \\ G_{xy} &= Q_{33} ; G_{xz} = \frac{F_{11}}{h} ; G_{yz} = \frac{F_{22}}{h} \end{aligned} \quad (16)$$

Pour tenir compte de l'écrasement des cannelures dans l'épaisseur du carton à double cannelures, le matériau est supposé élasto-plastique dans la direction z où seule la contrainte σ_z intervient telle que :

$$\text{- Critère de plasticité : } f = |\sigma_z| - \bar{\sigma} \quad (17)$$

$$\text{- Loi d'écrouissage : } \bar{\sigma} = E_0(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_p)^n \quad (18)$$

où E_0, ε_0, n sont les paramètres de la loi élasto-plastique utilisée. Le modèle ainsi décrit a été implémenté dans le logiciel Abaqus/Explicit à l'aide d'un programme utilisateur VUMAT.

4 Validation numérique sur l'écrasement d'un carton ondulé

Une plaque en carton ondulé (avec 5 couches) est utilisée afin de valider notre modèle d'homogénéisation à l'aide d'une simulation d'écrasement entre 2 bouteilles supposées rigides avec Abaqus (FIG. 4). Les dimensions de la plaque sont de 85.5x85.5 mm², les pas des cannelures sont $p^i=9$ mm et $p^s=6$ mm, les hauteurs des cannelures sont $h^i=5.2$ mm et $h^s=2.9$ mm, l'épaisseur des deux peaux et de la couche intermédiaire est de 0.25mm et l'épaisseur des deux cannelures est de 0.26mm. Les propriétés de tous les 5 papiers sont : $E_I=7547$ MPa, $E_I=2836$ MPa, $\nu_{I2}=0.478$, $G_{I2}=1632$ MPa. Les propriétés élastiques du solide équivalent données dans le tableau 1 sont déterminées à l'aide des équations (14), (15) et (16).

La loi de comportement élasto-plastique (18) suivant l'épaisseur du carton est déterminée par une simulation 3D avec des éléments de coque d'Abaqus: $E_0 = 2.72$ MPa, $\varepsilon_0 = 0.009$, $n = 0.4$.

La figure 5 montre la comparaison des contraintes de von Mises obtenues par les simulations avec le modèle classique de coque 3D et notre modèle d'homogénéisation solide 3D. Les valeurs maximales des contraintes sont très proches : 118,8 MPa par coque 3D et 120,5 MPa par notre modèle. Sur la figure 6, nous avons tracé les courbes de force-déplacement de la bouteille supérieure pour les 2 modèles, elles sont très proches.

5 Conclusion

Un modèle analytique d'homogénéisation 3D complet a été développé pour les plaques composites orthotropes de type carton ondulé qui permet de simuler le comportement non-linéaire suivant l'épaisseur du carton sans modéliser les cannelures 3D. Ce modèle a été implémenté dans Abaqus/Explicit à l'aide d'un programme utilisateur VUMAT. Notre modèle a été validé sur un exemple d'écrasement d'un intercalaire entre deux bouteilles et a montré qu'il était aussi efficace que le modèle de coque 3D d'Abaqus.

References

- [1] Carlsson L.A., Nordstrand T., Westerlind B., On the elastic stiffness of corrugated core sandwich plate, J Sandwich Structures and Materials, 3, 253–267, 2001.
- [2] Aboura Z., Talbi N., Allaoui S., Benzeggagh M.L., Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modeling, Composite Structures, 63, 53–62, 2004.
- [3] Buannic N., Cartraud P., Quesnel T., Homogenization of corrugated core sandwich panels, Composite Structures, 59, 299–312, 2003.

- [4] Biancolini M.E. Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board, Composite Structures, 69, 322–328, 2005.
- [5] Talbi N., Batti A., Ayad R., Guo Y.Q., An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard, Composite Structures, 69, 322–328, 2005.
- [6] Nordstrand T., Carlsson L.A., Allen H.G., Transverse shear stiffness of structural core sandwich, Composites Structures, 27, 317-329, 1994.
- [7] Abbès B., Guo Y.Q., Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: application to corrugated cardboard, Composite Structures, 92, 699–706, 2010.

	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	E_3 (MPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)	G_{13} (MPa)	G_{23} (MPa)	Épaisseur (mm)
Couche-1	1860.94	911.42	6.76	0.3668	461.12	7.78	76.35	1.35
Couche-2	20.26	247.65	6.76	0.0147	100.35	7.78	76.35	5.4
Couche-3	2368.13	1324.28	6.76	0.3212	461.12	7.78	76.35	1.35

Tableau 1. Propriétés des plaques solides équivalentes.

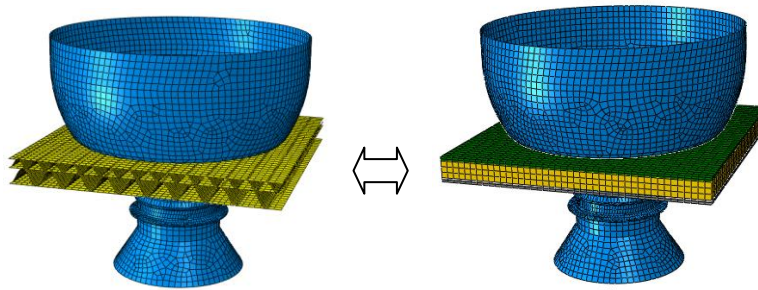


FIG. 4 – Maillage et géométries pour l'exemple d'écrasement d'un intercalaire.

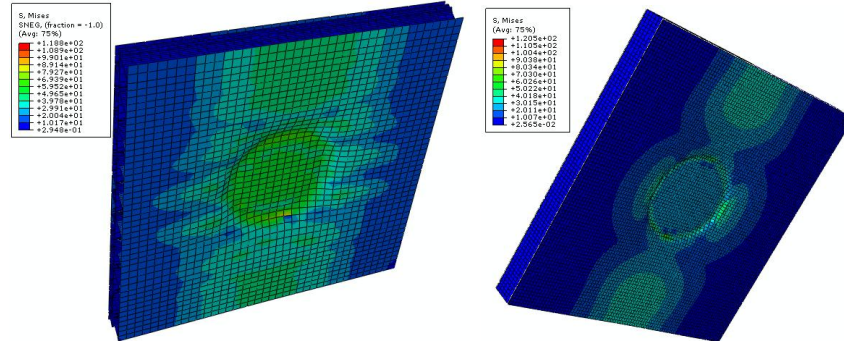


FIG. 5 – Comparaison des contraintes de von Mises.

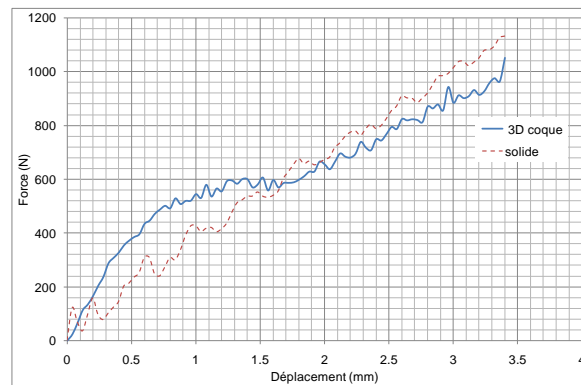


FIG. 6 – Comparaison des courbes force-déplacement de la bouteille supérieure.